

## **BOUNDARY ELEMENT METHOD UNTUK MENYELESAIKAN MASALAH SYARAT BATAS PERSAMAAN LAPLACE DIMENSI DUA**

**Muhammad Manaqib**

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Syarif Hidayatullah Jakarta  
Email: [muhammad.manaqib@uinjkt.ac.id](mailto:muhammad.manaqib@uinjkt.ac.id)

**Abstract:** Boundary Value Problem (BVP) of Laplace equation is used to formulate various problems, such as thermostatics, elastostatics, electrostatics, magnetostatics, fluid mechanics and water flow on porous media. Analytic settlement on BVP of Laplace equation relatively difficult to do, especially if the domain is irregular and involve mix boundary condition. The alternative that can be done is with approaching numerical method. Boundary Element Method (BEM) is a numerical method which is used to solve partial differential equation encountered on mathematical physics and engineering. This research will explain about how to solve BVP of Laplace equation using boundary element method and doing numerical simulation. The result is obtained five stages to complete BVP of Laplace equation. The numerical result which is obtained by using this boundary element method indicates that boundary element method can get a fairly accurate numerical solution. More and more line segments that is used to evaluate boundary element method then smaller the error.

**Keywords:** *Boundary Value Problem, Laplace Equation, Boundary Element Method.*

**Abstrak:** Masalah syarat batas (MSB) Persamaan Laplace banyak digunakan untuk memformulasikan berbagai macam masalah, seperti thermostatics, elastostatics, electrostatics, magnetostatics, mekanika fluida, dan aliran air pada media perporous. Penyelesaian analitik MSB Persamaan Laplace relative sulit dilakukan, terlebih jika domain tidak beraturan dan melibatkan syarat batas campuran. Alternatif yang dapat dilakukan adalah dengan menggunakan pendekatan metode numerik. Boundary Element Method atau Metode Elemen Batas (MEB) adalah metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial yang ditemui pada fisika matematis dan teknik. Penelitian ini akan membahas bagaimana menyelesaikan MSB Persamaan Laplace menggunakan MEB dan melakukan simulasi numerik. Hasilnya diperoleh lima tahapan untuk menyelesaikan MSB Persamaan Laplace. Hasil numerik yang diperoleh dengan menggunakan MEB mengindikasikan bahwa MEB dapat menghasilkan solusi numerik yang cukup akurat. Semakin banyak segmen garis yang digunakan untuk mengevaluasi MEB maka semakin kecil errornya.

**Kata kunci:** Masalah Syarat Batas, Persamaan Laplace, Boundary Element Method.

### **I. PENDAHULUAN**

Masalah syarat batas (MSB) persamaan Laplace banyak digunakan untuk memformulasikan berbagai macam masalah, seperti termostatik, elastostatik, elektrostatik, magnetostatik, mekanika fluida, dan aliran air pada media perporous [1]. Penyelesaian analitik MSB Persamaan Laplace relative sulit dilakukan, terlebih jika domain tidak beraturan

dan melibatkan syarat batas campuran. Alternatif yang dapat dilakukan adalah dengan menggunakan pendekatan metode numerik.

Salah satu metode numerik yang sedang berkembang dewasa ini adalah *Boundary Element Method* (BEM) atau dalam Bahasa Indonesia disebut Metode Elemen Batas (MEB). MEB adalah metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial yang ditemui pada fisika matematis dan teknik. Seperti, Persamaan Laplace, Persamaan Helmholtz, Persamaan Konveksi Difusi, Persamaan Potensial dan Aliran Viskos, Persamaan Elektrostatis dan Elektromagnetik, serta Persamaan Linear Elastostatik dan Elastodinamik [2]. Ide utama Metode Elemen Batas adalah solusi dari PDP tersebut diekspresikan dalam persamaan integral batas yang mengandung solusi fundamental dari PDP tersebut [4].

Terdapat beberapa kelebihan MEB dibandingkan metode numerik yang lainnya, seperti *Finite Element Method* (FEM) dan *Finite Difference Method* (FDM). Berikut beberapa kelebihan tersebut [3]:

- a) Diskritisasi hanya dilakukan pada batas domain, sehingga membuat pemodelan numerik dengan MEB lebih sederhana dan mereduksi jumlah titik kolokasi yang diperlukan.
- b) MEB yang dimodifikasi dapat menyelesaikan masalah dengan domain tak terbatas.
- c) MEB terbukti efektif pada perhitungan turunan dari lapangan fungsi seperti *flux*, tegangan, tekanan, dan momen. MEB juga dapat menyelesaikan konsentrasi gaya dan momen pada interior domain dan batas domain.
- d) Menggunakan satu himpunan titik kolokasi yang terletak pada batas-batas domain dapat digunakan untuk mencari solusi di semua titik pada domain. Berbeda dengan FEM dan FDM yang solusinya diperoleh hanya di titik kolokasi.
- e) MEB juga dapat menyelesaikan masalah dengan domain yang rumit, seperti sebuah retakan.

Berdasarkan uraian diatas MEB sangat baik untuk menyelesaikan MSB Persamaan Laplace. Sehingga dalam penelitian ini akan dibahas bagaimana menyelesaikan MSB Persamaan Laplace menggunakan MEB. Selanjutnya juga akan dilakukan simulasi numerik untuk melihat keakuratan MEB dalam menyelesaikan MSB Persamaan Laplace.

## **II. DASAR TEORI**

### **2.1. Masalah Syarat Batas**

Solusi dari suatu persamaan diferensial, baik persamaan diferensial biasa (PDB) maupun persamaan diferensial parsial (PDP) tidaklah tunggal. Jika solusi pada PDB ketidaktunggalan dinyatakan dalam konstanta, maka ketidaktunggalan pada PDP dinyatakan dengan fungsi. Ketunggalan solusi persamaan diferensial dapat diperoleh jika persamaan diferensial tersebut dilengkapi syarat awal dan atau syarat batas. Syarat awal adalah suatu syarat atau kondisi yang harus dipenuhi pada awal waktu tertentu, sedangkan syarat batas adalah suatu syarat atau kondisi yang harus dipenuhi pada batas-batas domain yang terkait dengan ruang. Untuk PDP order  $n$  dengan variabel tak bebas  $u$ , syarat batas dapat meliputi nilai fungsi tak diketahui  $u$  dan turunannya sampai order  $n-1$  pada batas-batas domain.

Suatu syarat batas dikatakan linear jika pada batas domain, syarat batas tersebut dinyatakan dalam relasi linear antara  $u$  dan turunan-turunannya. Syarat batas linear

diklasifikasikan sebagai berikut. Diberikan PDP order 2 yang terdefinisi pada domain  $D \in \mathbb{R}^2$  dengan himpunan semua titik batas domain dinyatakan dengan  $C$ .

1. Syarat batas Dirichlet

Syarat batas Dirichlet adalah syarat batas yang memberikan nilai fungsi tidak diketahui  $u$  pada  $C$ ,

$$u = \bar{u} \text{ pada } C,$$

dengan  $\bar{u}$  adalah fungsi yang telah diketahui dan terdefinisi pada kurva  $C$ .

2. Syarat batas Neumann

Syarat batas Neumann adalah syarat batas yang memberikan nilai turunan  $u$  pada arah normal terhadap  $C$  yang ditulis dengan  $\frac{\partial u}{\partial n}$ , dengan  $n$  adalah vektor normal arah keluar terhadap  $C$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \bar{u}_n \text{ pada } C,$$

dengan  $\bar{u}_n$  adalah fungsi yang diketahui dan terdefinisi pada kurva  $C$ .

3. Syarat batas Robin

Syarat batas Robin adalah syarat batas yang memberikan relasi linear antara  $u$  dan  $\frac{\partial u}{\partial n}$  pada  $C$ .

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ pada } C.$$

## 2.2. Boundary Element Method

Boundary Element Method (BEM) atau dalam Bahasa Indonesia disebut Metode Elemen Batas (MEB) adalah metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial (PDP) yang ditemui pada fisika matematis dan teknik. Seperti Persamaan Laplace, Persamaan Helmholtz, Persamaan Konveksi Difusi, Persamaan Potensial dan Aliran Viskos, Persamaan Elektrostatis dan Elektromagnetik, serta Persamaan Linear Elastostatik dan Elastodinamik [6].

Ide utama metode elemen batas adalah solusi dari PDP tersebut diekspresikan dalam persamaan integral batas yang menggandung solusi fundamental dari PDP, oleh karena itu Teorema Gauss-Green dan Identitas Kedua Green berperan penting dalam metode ini. Metode ini dinamakan metode elemen batas karena diskritisasi dilakukan pada batas domain dengan membagi menjadi ruas-ruas/segmen garis yang berhingga yang selanjutnya digunakan untuk mengevaluasi persamaan integral batasnya.

Metode Elemen Batas mulai berkembang pada abad ke-19, yang pada awalnya dikenal dengan istilah *Boundary Integral Equation Method* (BIEM), sebagai metode untuk menyelesaikan masalah fisika matematis. Pertamakali dikerjakan oleh G.Green pada tahun 1828 yaitu masalah syarat batas Dirichlet dan Neuman dari Persamaan Laplace dibentuk dalam integral solusinya, sehingga bentuk seperti ini disebut sebagai Fungsi Green [3]. Semenjak penemuan Fungsi Green tersebutlah banyak para peneliti yang mengembangkan Metode Elemen Batas.

### 2.3. Teorema Gaus-Green dan Identitas Kedua Green

**Teorema 1.** Teorema Gauss-Green [3]

Diberikan fungsi  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dan  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  yang kontinu dan terdiferensial pada domain  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ . Misalkan  $R \subseteq D$  suatu daerah yang dibatasi oleh kurva tertutup sederhana  $C$ , maka berlaku

$$\iint_R g \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = - \iint_R f \frac{\partial g}{\partial x} dx dy + \int_C fg n_x ds, \text{ dan} \quad (1)$$

$$\iint_R g \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = - \iint_R f \frac{\partial g}{\partial y} dx dy + \int_C fg n_y ds. \quad (2)$$

**Teorema 2.** Identitas Kedua Green [3]

Diberikan fungsi  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dan  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  yang terdiferensial sampai tingkat kedua dan diferensiabel tingkat keduanya kontinu pada domain  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ . Misalkan  $R \subseteq D$  suatu daerah yang dibatasi oleh kurva tertutup sederhana  $C$ , maka berlaku

$$\iint_R (g \nabla^2 f - f \nabla^2 g) dx dy = \int_C \left( g \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial g}{\partial n} \right) ds \quad (3)$$

dengan  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} i + \frac{\partial^2}{\partial y^2} j$  dan  $\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial x} n_x + \frac{\partial f}{\partial y} n_y$ .

Identitas Kedua Green memiliki peranan penting dalam pembahasan Metode Elemen Batas, karena menghubungkan integral pada suatu domain dengan integral pada batas domain. Manfaat dari teorema ini dapat mereduksi dimensi dari domain menjadi berkurang satu dimensi.

### 2.4. Persamaan Laplace

Persamaan Laplace adalah persamaan diferensial parsial (PDP) tingkat dua yang berbentuk [2],

$$\nabla^2 \phi(x, y) = 0, \quad (x, y) \in R \quad (4)$$

dengan  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} i + \frac{\partial^2}{\partial y^2} j$ .

Solusi dari Persamaan Laplace sangatlah banyak, misalkan  $\phi = x + y, \phi = x^2 + y^2$ , dll. Sehingga untuk solusi Persamaan Laplace yang tunggal, Persamaan Laplace dilengkapi dengan syarat batas. Persamaan diferensial parsial yang dilengkapi dengan syarat batas dalam matematika dikenal dengan istilah Masalah Syarat Batas (MSB).

Diketahui titik  $p_0(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ , ditinjau persamaan

$$\nabla^2 \phi(x - \xi, y - \eta) = \delta(p - p_0). \quad (5)$$

Solusi khusus/singular Persamaan (5) disebut solusi fundamental Persamaan Laplace [3]. Solusi dari Persamaan (5) adalah

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \ln \left( \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right) \text{ atau} & (6) \\ \phi(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \ln \left( (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \right), \\ & \text{dengan } x \neq \xi \text{ dan } y \neq \eta.\end{aligned}$$

Persamaan (6) inilah yang disebut dengan solusi fundamental Persamaan Laplace dimensi dua. Solusi fundamental Persamaan Laplace (5) juga dikenal sebagai fungsi Green dari operator Laplace pada domain keseluruhan  $\mathbb{R}^2$ , sehingga solusi ini tidak bergantung pada syarat batas.

### III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Penelitian ini akan membahas tentang bagaimana menyelesaikan Persamaan Laplace dua dimensi dengan syarat batas yang diketahui. Persamaan Laplace tersebut memiliki domain  $R$ , suatu daerah tertutup dan terbatas oleh kurva sederhana  $C$ . Berikut dituliskan Persamaan Laplace dua dimensi dengan syarat batas campuran.

$$\frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} = 0, (x, y) \in R, \quad (7)$$

dengan syarat batas

$$\phi = f_1(x, y) \text{ untuk } (x, y) \in C_1, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = f_2(x, y) \text{ untuk } (x, y) \in C_2, \quad (9)$$

dimana  $C_1$  dan  $C_2$  adalah dua buah kurva yang tidak berpotongan sedemikian sehingga  $C_1 \cup C_2 = C$ .

#### 3.1. Relasi Reciprocal dan Solusi Integral Batas

**Teorema 3.** *Relasi Reciprocal* [7]

Jika  $\phi_1$  dan  $\phi_2$  adalah sebarang solusi Persamaan Laplace pada domain daerah  $R$  dan  $C$  adalah himpunan semua titik batas domain  $R$ , maka

$$\int_C \left( \phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \right) ds(x, y) = 0. \quad (10)$$

Misalkan dalam *relasi reciprocal* Persamaan (10) dipilih  $\phi_1 = \Phi(x, y; \xi, \eta)$  dan  $\phi_2 = \phi(x, y)$ , dengan  $\Phi(x, y; \xi, \eta)$  adalah solusi fundamental Persamaan Laplace yang diberikan oleh Persamaan (6) dan  $\phi(x, y)$  adalah solusi Persamaan Laplace yang akan dicari pada domain  $R$ . Diperoleh *relasi reciprocal*

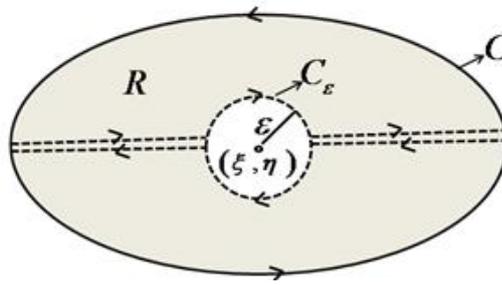
$$\int_C \left( \phi(x, y) \frac{\partial \Phi(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} - \Phi(x, y; \xi, \eta) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial n} \right) ds(x, y) = 0 \quad (11)$$

dengan  $(\xi, \eta) \neq (x, y)$ .

Diperhatikan bahwa  $\Phi(x, y; \xi, \eta)$  tidak terdefinisi pada titik  $(\xi, \eta)$ , sehingga *Relasi Reciprocal* (10) benar untuk  $\phi_1 = \Phi(x, y; \xi, \eta)$  dan  $\phi_2 = \phi(x, y)$ , jika  $(\xi, \eta)$  tidak terletak pada domain  $R \cup C$ , atau dapat ditulis

$$\int_C \left( \phi(x, y) \frac{\partial \Phi(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} - \Phi(x, y; \xi, \eta) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial n} \right) ds(x, y) = 0, \quad (\xi, \eta) \notin R \cup C. \quad (12)$$

Tujuan akhir adalah ingin dicari solusi Persamaan Laplace pada domainnya, yaitu  $R \cup C$ . Sedangkan Persamaan (11) hanya terdefinisi untuk  $(\xi, \eta) \notin R \cup C$ , maka perlu dilakukan modifikasi domain jika  $(\xi, \eta) \in R$  dan  $(\xi, \eta) \in C$ . Berikut gambar modifikasi domain jika  $(\xi, \eta) \in R$ .



**Gambar 1.** Modifikasi Domain Jika  $(\xi, \eta) \in R$  [5]

Modifikasi domain yang dilakukan adalah dengan mengisolasi titik  $(\xi, \eta)$  menggunakan lingkaran  $C_\epsilon$  [7], seperti terlihat pada Gambar 1 dan mengambil  $\epsilon \rightarrow 0^+$ . Sehingga *Relasi Reciprocal* (11) dapat terdefinisi untuk  $(\xi, \eta) \in R$ . Diperoleh

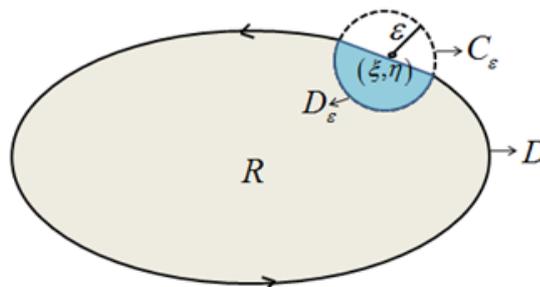
$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{C \cup C_\epsilon} \left( \phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds = 0 \\ \Leftrightarrow & \int_C \left( \phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{C_\epsilon} \left( \phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds = 0 \\ \Leftrightarrow & \int_C \left( \phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{C_\epsilon} \left( \phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds. \end{aligned} \quad (13)$$

Selanjutnya, dengan mentransformasikan ke dalam koordinat kutub dan digunakan deret Tylor ruas kanan Persamaan (13) dapat dievaluasi, sehingga diperoleh.

$$\int_C \left( \phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds = \phi(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in R. \quad (14)$$

Jika  $(\xi, \eta) \in C$ , lebih khususnya pada bagian *smooth*  $C$ . Modifikasi domain yang dilakukan terlihat pada gambar 2. Modifikasi domain yang dilakukan adalah dengan mengisolasi titik  $(\xi, \eta)$ , menggunakan lingkaran  $C_\epsilon$  [7], seperti terlihat pada Gambar 2 dan mengambil  $\epsilon \rightarrow 0^+$ . Sehingga *Relasi Reciprocal* (11) akan terdefinisi untuk  $(\xi, \eta)$  pada bagian *smooth*  $C$ . Diperoleh

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{D \cup D_\varepsilon} \left( \phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds = 0 \\
 \Leftrightarrow & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_D \left( \phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{D_\varepsilon} \left( \phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds = 0 \\
 \Leftrightarrow & \int_C \left( \phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{D_\varepsilon} \left( \phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds.
 \end{aligned} \tag{15}$$



**Gambar 2.** Modifikasi Domain  $(\xi, \eta)$  pada Smooth  $C$ . [5]

Selanjutnya, dengan mentransformasikan ke dalam koordinat kutub dan digunakan deret Tylor ruas kanan Persamaan (15) dapat dievaluasi, sehingga diperoleh.

$$\int_C \left( \phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds = \frac{1}{2} \phi(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \text{ pada bagian } \textit{smooth} C. \tag{16}$$

Akhirnya, berdasarkan Persamaan (12), (14) dan (16), diperoleh

$$\lambda(\xi, \eta) \phi(\xi, \eta) = \int_C \left( \phi(x, y) \frac{\partial \Phi(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} - \Phi(x, y; \xi, \eta) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial n} \right) ds \tag{17}$$

dengan

$$\lambda(\xi, \eta) = \begin{cases} 0, & \text{jika } (\xi, \eta) \notin R \cup C \\ \frac{1}{2}, & \text{jika } (\xi, \eta) \text{ pada bagian } \textit{smooth} C \\ 1, & \text{jika } (\xi, \eta) \in R. \end{cases}$$

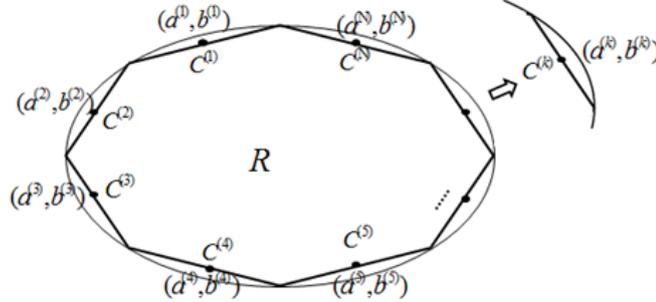
Persamaan (17) inilah yang disebut sebagai persamaan integral batas Persamaan Laplace.

### 3.2. Solusi Element Batas dengan Elemen Koston

Persamaan Laplace (7) telah dibentuk persamaan integral batasnya yaitu Persamaan (17). Selanjutnya, dari Persamaan (17) akan dicari nilai  $(\xi, \eta)$ , yaitu solusi dari Persamaan Laplace (7). Namun penyelesaian Persamaan (17) sulit diselesaikan secara analitik, sehingga diperlukan suatu metode numerik yang akan diturunkan sebagai berikut.

Pertama diskritisasi batas domain  $C$  menggunakan ruas-ruas garis yang berhubungan satu sama lain, dengan ujung-ujungnya terletak pada kurva  $C$ , seperti terlihat pada Gambar 3. Misalkan jumlah ruas garisnya  $N$  dan diberikan nama  $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(N)}$  dengan urutan

berlawanan arah jarum jam. Pada setiap  $C^{(k)}, k=1,2,\dots,N$ , dipilih titik tengahnya sebagai titik kolokasi (*collocation point*) dan namakan  $(a^{(k)}, b^{(k)})$ .



**Gambar 3.** Diskritisasi Batas Domain [5]

Langkah kedua asumsikan pada ruas garis  $C^{(k)}, k=1,2,\dots,N$  nilai dari  $\phi(x, y)$  dan  $\frac{\partial \phi}{\partial n}(x, y)$  konstan yaitu

$$\phi(x, y) \approx \phi^{(k)} \text{ dan } \frac{\partial \phi}{\partial n}(x, y) \approx p^{(k)}$$

dengan  $\phi^{(k)} = \phi(a^{(k)}, b^{(k)})$  dan  $p^{(k)} = \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{(x, y) = (a^{(k)}, b^{(k)})}$ .

Diskritisasi batas domain artinya bahwa kurva  $C$  didekati oleh gabungan kurva  $C^{(k)}$  atau  $C \approx C^{(1)} \cup C^{(2)} \cup \dots \cup C^{(N)}$ . Selanjutnya, dengan diskritisasi batas domain dan asumsi konstan tersebut Persamaan (17) dapat diubah menjadi,

$$\begin{aligned} \lambda(\xi, \eta)\phi(\xi, \eta) &\approx \sum_{k=1}^N \int_{C^{(k)}} \left( \phi^{(k)} \frac{\partial \Phi}{\partial n}(x, y; \xi, \eta) - \Phi(x, y; \xi, \eta) p^{(k)} \right) ds \\ &= \sum_{k=1}^N \left[ \phi^{(k)} f_2^{(k)}(\xi, \eta) - p^{(k)} f_1^{(k)}(\xi, \eta) \right], \end{aligned} \tag{18}$$

dengan

$$\begin{aligned} f_1^{(k)} &= \int_{C^{(k)}} \Phi(x, y; \xi, \eta) ds = \frac{1}{4\pi} \int_{C^{(k)}} \ln \left( (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \right) ds, \\ f_2^{(k)} &= \int_{C^{(k)}} \frac{\partial \Phi}{\partial n}(x, y; \xi, \eta) ds = \frac{1}{4\pi} \int_{C^{(k)}} \frac{\partial}{\partial n} \left[ \ln \left( (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \right) \right] ds. \end{aligned}$$

Langkah ketiga, substitusikan  $(\xi, \eta) = (a^{(m)}, b^{(m)})$ ,  $m=1,2,\dots,N$ , diperoleh

$$\begin{aligned} \lambda(a^{(m)}, b^{(m)})\phi(a^{(m)}, b^{(m)}) &\approx \sum_{k=1}^N \left[ \phi^{(k)} f_2^{(k)}(a^{(m)}, b^{(m)}) - p^{(k)} f_1^{(k)}(a^{(m)}, b^{(m)}) \right], \\ m &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \tag{19}$$

Diketahui  $(a^{(m)}, b^{(m)})$  pada bagian *smooth*  $C$ , maka  $\lambda(a^{(m)}, b^{(m)}) = \frac{1}{2}$ , sehingga diperoleh

$$\frac{1}{2}\phi(a^{(m)}, b^{(m)}) \approx \sum_{k=1}^N [\phi^{(k)} f_2^{(k)}(a^{(m)}, b^{(m)}) - p^{(k)} f_1^{(k)}(a^{(m)}, b^{(m)})], \quad (20)$$

$m = 1, 2, \dots, N.$

Agar penulisan lebih sederhana, dimisalkan

$$f_{1,m}^{(k)} = f_1^{(k)}(a^{(m)}, b^{(m)}), \phi^{(m)} = \phi(a^{(m)}, b^{(m)}), \text{ dan } f_{2,m}^{(k)} = f_2^{(k)}(a^{(m)}, b^{(m)}).$$

sehingga Persamaan (20) dapat ditulis,

$$\frac{1}{2}\phi^{(m)} \approx \sum_{k=1}^N [\phi^{(k)} f_{2,m}^{(k)} - p^{(k)} f_{1,m}^{(k)}], m = 1, 2, \dots, N \quad (21)$$

dengan,

$$f_{1,m}^{(k)} = \frac{1}{4\pi} \int_{C^{(k)}} \ln\left(\left(x - a^{(m)}\right)^2 + \left(y - b^{(m)}\right)^2\right) ds$$

$$f_{2,m}^{(k)} = \frac{1}{4\pi} \int_{C^{(k)}} \frac{\partial}{\partial n} \left[ \ln\left(\left(x - a^{(m)}\right)^2 + \left(y - b^{(m)}\right)^2\right) \right] ds.$$

Diperhatikan bahwa pada Persamaan (21) nilai dari  $f_{1,m}^{(k)}$  dan  $f_{2,m}^{(k)}$  dapat diketahui, serta nilai dari  $\phi^{(m)} = \phi^{(k)}$  untuk suatu  $k = 1, 2, \dots, N$ . Selanjutnya, karena batas domain  $C$  didekati dengan poligon  $N$  sisi ( $C \approx C^{(1)} \cup C^{(2)} \cup \dots \cup C^{(N)}$ ) maka untuk setiap  $C^{(k)}, k = 1, 2, \dots, N$  element dari  $C_1$  atau  $C_2$ . Berdasarkan syarat batas Persamaan (8), jika  $C^{(k)} \in C_1$  maka nilai  $\phi^{(k)}$  diketahui dan nilai  $p^{(k)}$  tidak diketahui. Sedangkan berdasarkan syarat batas Persamaan (9), jika  $C^{(k)} \in C_2$  maka nilai  $\phi^{(k)}$  tidak diketahui dan nilai  $p^{(k)}$  diketahui. Sehingga, dari Persamaan (21) diperoleh sistem persamaan linear (SPL)  $N$  persamaan dan  $N$  variabel. Secara lengkap SPL tersebut adalah sebagai berikut,

$$\sum_{k=1}^N a^{(mk)} z^{(k)} = \sum_{k=1}^N b^{(mk)}, m = 1, 2, \dots, N \quad (22)$$

dengan,

$$a^{(mk)} = \begin{cases} f_{2,m}^{(k)} - \delta_{mk}, & \text{jika } \frac{\partial \phi}{\partial n} \text{ diketahui pada } C^{(k)}, \\ -f_{1,m}^{(k)}, & \text{jika } \phi \text{ diketahui pada } C^{(k)}, \end{cases}$$

$$z^{(k)} = \begin{cases} \phi^{(k)}, & \text{jika } \frac{\partial \phi}{\partial n} \text{ diketahui pada } C^{(k)}, \\ p^{(k)}, & \text{jika } \phi \text{ diketahui pada } C^{(k)}, \end{cases}$$

$$b^{(mk)} = \begin{cases} p^{(k)} f_{1,m}^{(k)} & , \text{jika } \frac{\partial \phi}{\partial n} \text{ diketahui pada } C^{(k)}, \\ \phi^{(k)} (\delta_{mk} - f_{2,m}^{(k)}) & , \text{jika } \phi \text{ diketahui pada } C^{(k)}, \end{cases}$$

$$\delta^{(mk)} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{jika } m = k, \\ 0, & \text{jika } m \neq k. \end{cases}$$

Diasumsikan bahwa penyelesaian SPL (22) ada dan tunggal, sehingga dapat diperoleh nilai  $\phi^{(k)}$  jika  $C^{(k)} \in C_2$  dan  $p^{(k)}$  jika  $C^{(k)} \in C_1$ . Akhirnya, diperoleh  $\phi^{(k)}$  dan  $p^{(k)}$  untuk setiap  $k = 1, 2, \dots, N$ . Selanjutnya, menggunakan Persamaan (18) serta nilai  $\phi^{(k)}$  dan  $p^{(k)}$  yang telah diperoleh dapat digunakan untuk mencari nilai  $\phi(a, b), (a, b) \in C \cup R$ , menggunakan rumus

$$\lambda(a, b)\phi(a, b) \approx \sum_{k=1}^N [\phi^{(k)} f_2^{(k)}(a, b) - p^{(k)} f_1^{(k)}(a, b)] \quad (23)$$

dengan

$$f_{1,m}^{(k)} = \frac{1}{4\pi} \int_{C^{(k)}} \ln((x-a)^2 + (y-b)^2) ds$$

$$f_{2,m}^{(k)} = \frac{1}{4\pi} \int_{C^{(k)}} \frac{\partial}{\partial n} \left[ \ln((x-a)^2 + (y-b)^2) \right] ds.$$

### 3.3. Simulasi Numerik

Diberikan Masalah Syarat Batas (MSB) Persamaan Laplace

$$\frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad (24)$$

dengan syarat batas

$$\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} = x, \text{ untuk } 0 < x < 1 \text{ dan } y=0,$$

$$\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} = y, \text{ untuk } 0 < y < 1 \text{ dan } x=1, \quad (25)$$

$$\phi(x, y) = x, \text{ untuk } 0 < x < 1 \text{ dan } y=1,$$

$$\phi(x, y) = 0, \text{ untuk } 0 < y < 1 \text{ dan } x=0.$$

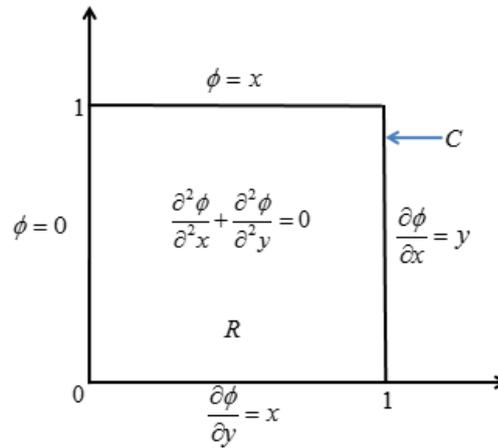
Secara sistematis MSB tersebut dapat dilihat pada Gambar 1.

Menggunakan prosedur penyelesaian MSB dengan MEB yang telah diberikan sebelumnya, akan dicari solusi pendekatan di beberapa titik pada domainnya. Berikut prosedur penyelesaiannya.

#### 1. Solusi Fundamental

Persamaan (24) adalah Persamaan Laplace yang solusi fundamentalnya telah diberikan pada Persamaan (6), yaitu

$$\phi(x, y) = \frac{1}{4\pi} \ln((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2), \text{ dengan } x \neq \xi \text{ dan } y \neq \eta. \quad (26)$$



Gambar 4. Contoh 1

2. *Relasi Reciprocal*

*Relasi reciprocal* antara  $\Phi(x, y; \xi, \eta)$  solusi fundamental Persamaan Laplace dan  $\phi(x, y)$  solusi Persamaan Laplace (24) yang akan dicari pada domain  $R$  adalah sebagai berikut:

$$\int_C \left( \phi(x, y) \frac{\partial \Phi(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} - \Phi(x, y; \xi, \eta) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial n} \right) ds(x, y) = 0 \quad (27)$$

dengan  $(\xi, \eta) \neq (x, y)$ .

3. *Persamaan Integral Batas*

Menggunakan *relasi reciprocal* (27) dan modifikasi domain diperoleh persamaan integral batas

$$\lambda(\xi, \eta) \phi(\xi, \eta) = \int_C \left( \phi(x, y) \frac{\partial \Phi(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} - \Phi(x, y; \xi, \eta) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial n} \right) ds \quad (28)$$

dengan

$$\lambda(\xi, \eta) = \begin{cases} 0, & \text{jika } (\xi, \eta) \notin R \cup C, \\ \frac{1}{2}, & \text{jika } (\xi, \eta) \text{ pada bagian } \textit{smooth} C, \\ 1, & \text{jika } (\xi, \eta) \in R. \end{cases}$$

4. *Penyelesaian Persamaan Integral Batas*

Dengan mensubstitusikan titik-titik kolokasi ke persamaan integral batas diperoleh SPL

$$\frac{1}{2} \phi(a^{(m)}, b^{(m)}) \approx \sum_{k=1}^N \left[ \phi^{(k)} f_2^{(k)}(a^{(m)}, b^{(m)}) - p^{(k)} f_1^{(k)}(a^{(m)}, b^{(m)}) \right], \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (29)$$

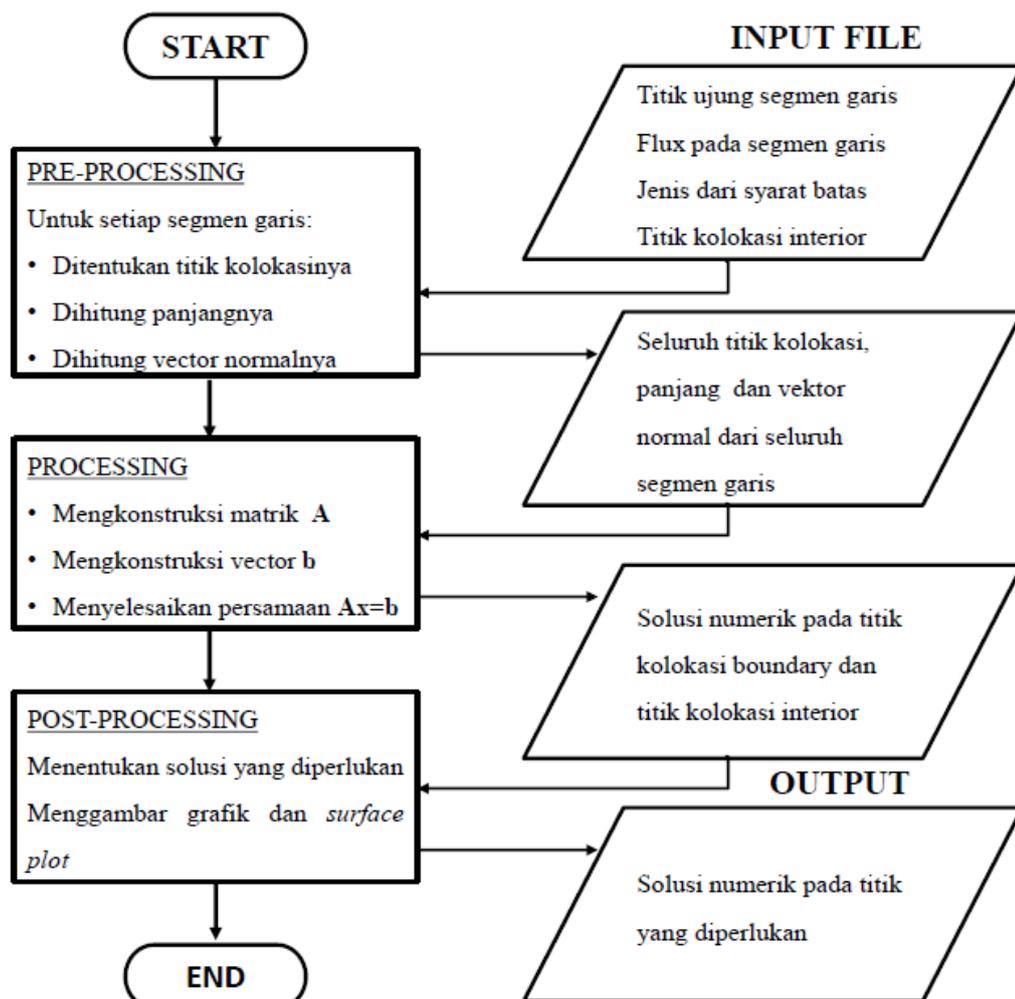
5. *Persamaan untuk Mengevaluasi Solusi*

Dengan mensubstitusikan solusi Persamaan (29) diperoleh persamaan untuk mengevaluasi solusi Persamaan (24) sebagai berikut.

$$\lambda(a, b) \phi(a, b) \approx \sum_{k=1}^N \left[ \phi^{(k)} f_2^{(k)}(a, b) - p^{(k)} f_1^{(k)}(a, b) \right] \text{ dengan } (a, b) \in C \cup R. \quad (30)$$

Langkah-langkah metode MEB tersebut akan diimplementasikan dalam program Matlab. Implementasi Matlab dalam kasus ini dibagi menjadi tiga tahap, yaitu tahap Pre-processing, Processing, dan Post-processing. Setiap tahap memerlukan input dan menghasilkan output. Beberapa tahap juga memerlukan output tahap sebelumnya untuk dijadikan input pada tahap tersebut. Secara sistematis implementasi program Matlab dapat dilihat pada skema Gambar 5.

Selanjutnya implementasi program Matlab tersebut digunakan untuk menyelesaikan MSB Persamaan Laplace (24) dengan syarat batas campuran (25). Pertama dievaluasi sembilan buah titik menggunakan jumlah titik kolokasi/segmen garis yang berbeda-beda, yaitu 80, 160, 320, 640, dan 1280 segmen garis. Hal ini dilakukan untuk melihat berapakah segmen garis yang terbaik untuk menyelesaikan MSB Persamaan Laplace menggunakan MEB, dengan melihat nilai errornya. Nilai error diperoleh dengan mencari selisih hasil MEB dengan solusi eksaknya. Dapat ditunjukkan bahwa solusi eksak dari MSB Persamaan Laplace (24) dengan syarat batas campuran (25) adalah  $\phi(x, y) = xy$ . Selanjutnya, akan dibuat surface plot dari MSB Persamaan Laplace pada domain  $R$  yang berbentuk persegi. Dievaluasi 100 buah titik pada domain  $R$  menggunakan 620 titik segmen garis pada  $C$  untuk membuat surface plot tersebut.



**Gambar 5.** Diagram Alur Penyelesaian dengan Matlab.

Berikut hasil evaluasi di beberapa titik dengan MEB dan solusi eksaknya, serta *surface plot* solusi MSB pada domainnya.

1. 80 segmen

Maksimal error untuk beberapa titik pada 80 segmen adalah 0.0010726125. Titik-titik tersebut tertera pada tabel berikut:

Point	MEB	Exact	Error
(0.1,0.2)	0.0200719874	0.0200000000	0.0000719874
(0.1,0.3)	0.0300719881	0.0300000000	0.0000719881
(0.1,0.4)	0.0400670637	0.0400000000	0.0000670637
(0.5,0.2)	0.1004613811	0.1000000000	0.0004613811
(0.5,0.3)	0.1504264639	0.1500000000	0.0004264639
(0.5,0.4)	0.2003805439	0.2000000000	0.0003805439
(0.9,0.2)	0.1810726125	0.1800000000	0.0010726125
(0.9,0.3)	0.2708540015	0.2700000000	0.0008540015
(0.9,0.4)	0.3607156534	0.3600000000	0.0007156534

2. 160 segmen

Point	MEB	Exact	Error
(0.1,0.2)	0.0200234386	0.0200000000	0.0000234386
(0.1,0.3)	0.0300230887	0.0300000000	0.0000230887
(0.1,0.4)	0.0400215028	0.0400000000	0.0000215028
(0.5,0.2)	0.1001435457	0.1000000000	0.0001435457
(0.5,0.3)	0.1501340977	0.1500000000	0.0001340977
(0.5,0.4)	0.2001212520	0.2000000000	0.0001212520
(0.9,0.2)	0.1803315548	0.1800000000	0.0003315548
(0.9,0.3)	0.2702681622	0.2700000000	0.0002681622
(0.9,0.4)	0.3602295462	0.3600000000	0.0002295462

Maksimal Error untuk beberapa titik tersebut adalah 0.0003315548.

3. 320 segmen

Point	MEB	Exact	Error
(0.1,0.2)	0.0200103231	0.0200000000	0.0000103231
(0.1,0.3)	0.0300103899	0.0300000000	0.0000103899
(0.1,0.4)	0.0400100046	0.0400000000	0.0000100046
(0.5,0.2)	0.1000599220	0.1000000000	0.0000599220
(0.5,0.3)	0.1500567499	0.1500000000	0.0000567499
(0.5,0.4)	0.2000530544	0.2000000000	0.0000530544
(0.9,0.2)	0.1801239262	0.1800000000	0.0001239262
(0.9,0.3)	0.2701029780	0.2700000000	0.0001029780
(0.9,0.4)	0.3600908944	0.3600000000	0.0000908944

Maksimal Error untuk beberapa titik tersebut adalah 0.0001239262.

4. 640 segmen

Point	MEB	Exact	Error
(0.1,0.2)	0.0200021627	0.0200000000	0.0000021627
(0.1,0.3)	0.0300019491	0.0300000000	0.0000019491
(0.1,0.4)	0.0400016671	0.0400000000	0.0000016671
(0.5,0.2)	0.1000123352	0.1000000000	0.0000123352
(0.5,0.3)	0.1500112123	0.1500000000	0.0000112123
(0.5,0.4)	0.2000097899	0.2000000000	0.0000097899
(0.9,0.2)	0.1800281993	0.1800000000	0.0000281993
(0.9,0.3)	0.2700224234	0.2700000000	0.0000224234
(0.9,0.4)	0.3600189403	0.3600000000	0.0000189403

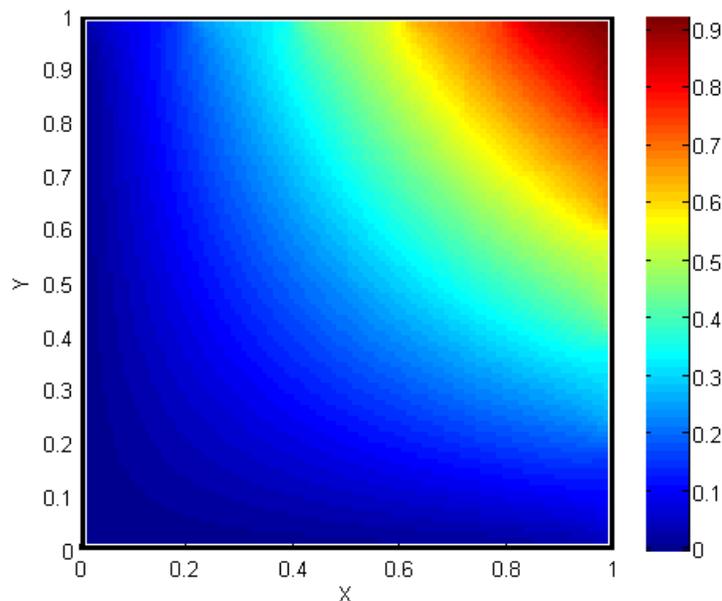
Maksimal Error untuk beberapa titik tersebut adalah 0.0000281993.

5. 1280 segmen

Point	MEB	Exact	Error
(0.1,0.2)	0.0200006324	0.0200000000	0.0000006324
(0.1,0.3)	0.0300005411	0.0300000000	0.0000005411
(0.1,0.4)	0.0400004319	0.0400000000	0.0000004319
(0.5,0.2)	0.1000035823	0.1000000000	0.0000035823
(0.5,0.3)	0.1500031638	0.1500000000	0.0000031638
(0.5,0.4)	0.2000026564	0.2000000000	0.0000026564
(0.9,0.2)	0.1800081843	0.1800000000	0.0000081843
(0.9,0.3)	0.2700063434	0.2700000000	0.0000063434
(0.9,0.4)	0.3600052111	0.3600000000	0.0000052111

Maksimal Error untuk beberapa titik tersebut adalah 0.0000081843.

Berdasarkan simulasi numerik tersebut terlihat bahwa error yang dihasilkan cukup kecil yaitu yang paling besar 0.0010726125 pada saat digunakan 80 segmen garis. Hal ini mengindikasikan MEB cukup baik memberikan solusi numerik masalah MSB Persamaan Laplace. Berdasarkan simulasi numerik di atas juga terlihat bahwa semakin banyak segmen garis yang digunakan untuk mengevaluasi MSB Persamaan Laplace maka error yang dihasilkan juga semakin kecil. Error terkecil diperoleh saat digunakan 1.280 segmen garis.



**Gambar 6.** *Surface Plot*

Gambar 6 adalah gambar surface plot MSB Persamaan Laplace (24) dan syarat batas campuran (25) pada domain  $R$ . Warna pada suatu titik pada Gambar 6 mewakili nilai dari  $\phi$  di titik tersebut, berturut-turut degradasi warna dari biru sampai merah bernilai 0 sampai 1. Diperhatikan bahwa warna dari pojok kiri bawah sampai pojok kanan atas berwarna degradasi biru sampai merah, hal ini mengindikasikan solusi yang diperoleh dari hasil numerik mendekati solusi eksaks  $\phi(x, y) = xy$ .

#### IV. KESIMPULAN

Berdasarkan pada pembahasan sebelumnya secara garis besar prosedur penyelesaian persamaan diferensial parsial dengan syarat batas menggunakan MEB adalah sebagai berikut.

1. Tentukan solusi fundamental dari persamaan diferensial parsial tersebut.
2. Bentuk relasi *reciprocal* antara solusi yang akan dicari dengan solusi fundamental.
3. Bentuk persamaan integral batas, yang diperoleh dari *relasi reciprocal* dan modifikasi domain.
4. Selesaikan persamaan integral batas tersebut dengan mensubstitusikan titik-titik kolokasi ke persamaan integral batas, sehingga diperoleh SPL.
5. Selesaikan SPL tersebut. Selanjutnya dengan mensubstitusikan solusi SPL ke persamaan integral batas, diperoleh suatu persamaan yang dapat digunakan untuk mengevaluasi solusi persamaan diferensial parsial tersebut di semua titik pada domainnya.

Hasil numerik yang diperoleh dengan menggunakan MEB ini mengindikasikan bahwa MEB ini dapat menghasilkan solusi numerik yang cukup akurat. Semakin banyak segmen garis yang digunakan untuk mengevaluasi MEB maka semakin kecil errornya.

#### REFERENSI

- [1] Ang, Whye-Teong, 2007, *A Beginners Course in Boundary Element Methods*, Universal Publishers, Florida.
- [2] Humi, Mayer dan Miller, William B., 1992, *Boundary Value Problems and Partial Differential Equation*, PWS-KENT, Boston.
- [3] Katsikadelis, Jhon T., 2002, *Boundary Element : Theory and Applications*, Elsevier Science, Oxford.
- [4] Lobo, Maria, 2008, *Dual Reciprocity Boundary Element Methods for the Solution of a Class of Ilfiltration Problems*, Faculty of Engineering, Coputer and Mathematical Sciences, University of Adelaide, Doctor Disertation.
- [5] Manaqib, Muhammad, 2015, *Dual Reciprocity Boundary Element Methods* untuk Menyelesaikan Masalah Infiltrasi Saluran Irigasi Alur di dalam Beberapa Jenis Tanah Homogen, Universitas Gadjah Mada, Master Tesis.
- [6] Pozrikidis, Costas, 2002, *A Practical Guide to Boundary Element Methods with The Software Library BEMLIB*, Chapman & Hall/CRR, Florida.
- [7] Solekhuudin, Imam dan Ang, K.C., 2012, Suction Potential and Water Absorption from Periodic Chanel in Different Types of Homogeneous Soil, *Electronic Jurnal of Boundary Element*, 10, pp. 42-55.
- [8] Solekhuudin, Imam, 2013, *Dual Reciprocity Boundary Element Methods for Water Ilfiltration Problems in Irrigation*, National Institute of Education, Nanyang Technological University, Doctor Dissertation.